MITTLERE ANZAHL VON REBALANCIERUNGSOPERATIONEN IN GEWICHTSBALANCIERTEN BÄUMEN

Norbert Blum
Kurt Mehlhorn

Kurzfassung: Es wird gezeigt, daß die mittlere Anzahl von Balancierungsoperationen (Rotationen und Doppelrotationen) bei gewichtsbalancierten Bäumen konstant ist.

Abstract: It is shown that the average number of rebalancing operations (rotations and double rotations) in weight-balanced trees is constant.

I. EINLEITUNG

Balancierte Bäume sind eine populäre Methode für die Speicherung von Information in einem Computer. Die Basisoperationen Zugriff, Einfügen und Streichen können bei einer Menge von n Items in einer Zeit von O(log n) ausgeführt werden.

Sämtliche bekannten Arten von balancierten Bäumen lassen sich auf zwei Grundtypen zurückführen: Höhenbalancierte Bäume (AVL-Bäume [AVL], 2-3-Bäume [AHU], Bruder-Bäume [OS],...) und gewichtsbalancierte Bäume. Bei den ersteren balanciert man entweder Höhen der Teilbäume (AVL-Bäume) oder die Anzahl der Söhne eines Knotens (2-3 Bäume, Bruder-Bäume). Hier werden wir uns mit den gewichtsbalancierten Bäumen näher befassen. Gewichtsbalancierte Bäume wurden von Nievergelt und Reingold [NR] eingeführt.

Ein Knoten in einem binären Baum hat entweder zwei Söhne oder keinen Sohn. Knoten ohne Söhne werden Blätter genannt.

Definition: Sei T ein binärer Baum. Ist T ein einfaches Blatt, dann ist die Wurzelbalance $\rho(T)$ gleich 1/2. Im anderen Fall definieren wir:

$\rho(T) = \frac{|T_\ell|}{|T|}$, wobei $|T_\ell|$ die Anzahl der Blätter im linken Teilbaum von T und $|T|$ die Anzahl der Blätter in T ist.

Definition: Sei $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Ein binärer Baum T heißt von beschränkter Balance α oder in $BB[\alpha]$, genau dann, wenn gilt:

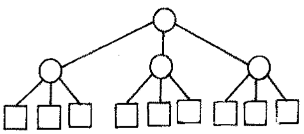
1) $\alpha \leq \rho(T) \leq 1-\alpha$
2) T ist Blatt oder beide Teilbäume sind von beschränkter Balance α.

Bemerkung: Beachte, daß $\frac{|T_r|}{|T|} = 1-\rho(T)$. Indem wir eventuell den linken und rechten Teilbaum austauschen, können wir oBdA annehmen, daß $\rho(T) \leq 1/2$.

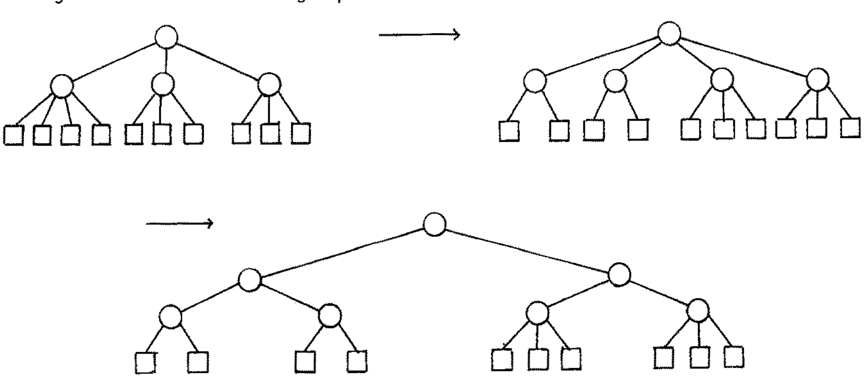
Balancierte Bäume haben viele Eigenschaften gemeinsam:

1) Die Tiefe ist durch $O(\log |T|)$ beschränkt.
2) Nach Einfügen oder Streichen eines Blattes sind höchstens $O(\log|T|)$ Balancierungsoperationen nötig, um den Baum zu rebalancieren. Die Rebalancierungsoperationen sind begrenzt auf den Suchpfad. In allen bekannten Beispielen von balancierten Bäumen ist es einfach, ein Beispiel zu konstruieren, in welchem jeder Knoten entlang dem Suchpfad rebalanciert werden muß.

Beispiel: Betrachte folgenden 2-3 Baum



Das Einfügen eines Knotens im linken Teilbaum verursacht folgende Folge von Balancierungsoperationen.



Beachte: Erneutes Einfügen eines Blattes verursacht höchstens eine Balancierungsoperation. Dies liegt nahe, daß im Mittel (gemittelt über eine Zufallsfolge von Einfügen und Streichen) eine kleinere Anzahl von Balancierungsoperationen genügen. Beachte auch, daß Streichen des am weitesten links liegenden Blattes die obige Folge umkehrt und den ursprünglichen Baum wiederherstellt.

3) Simulationsresultate zeigen, daß im Mittel eine konstante Anzahl von Operationen genügen. Karlton und andere [KFSK] berichten, daß im Mittel 0,46 (0,23) Balancierungsoperationen (Rotationen und Doppelrotationen) erforderlich sind, um einen AVL-Baum nach Einfügen (Streichen) eines Blattes zu rebalancieren. Plausibilitätsargumente stützen den empirischen Befund [F,KN Seite 462, NR].

Diese Plausibilitätsargumente basieren auf der ungerechtfertigten Annahme, daß die Balancen (Höhendifferenz zwischen linkem und rechtem Teilbaum in AVL-Bäume, Wurzelbalancen in BB[α]-Bäumen) unabhängige Zufallsvariablen sind. Diese Plausibilitätsbetrachtungen liefern Konstanten, die nahe bei den empirischen Befunden liegen.

Wir werden beweisen, daß die mittlere Anzahl der Balancierungsoperationen in BB[α]-Bäumen durch eine Konstante beschränkt ist. Wir beweisen sogar noch ein stärkeres Resultat, nämlich:

Es gibt eine Konstante c (abhängig von α) sodaß: Die Gesamtzahl der Balancierungsoperationen, die bei Ausführung einer beliebigen Folge von n Einfüge- und Streiche-Operationen in einem anfänglich leeren BB[α]-Baum erforderlich sind, ist durch $c \cdot n$ begrenzt.

Wir mitteln nicht über viele Folgen von Einfüge- und Streiche-Operationen, sondern nur über die Einfüge- und Streich-Operationen einer einzigen beliebigen Folge (im Gegensatz zu den Simulationen). Unsere Konstante ist viel größer als die empirischen Befunde nahelegen (über 27 für $\alpha = 1/4$). Wir behaupten nicht, daß unsere Konstante die bestmögliche ist.

Zusätzlich korrigieren wir einen ernsthaften Fehler in der Originalarbeit von Nievergelt und Reingold über BB[α]-Bäume.

II. DER EFFEKT VON ROTATION UND DOPPELROTATION IN GEWICHTSBALANCIERTEN BÄUMEN

BB[α]-Bäume werden durch Rotation und Doppelrotation balanciert. Folgendes Bild ist aus [NR] genommen. Vierecke stehen für Knoten, Dreiecke für Teilbäume. Die Wurzelbalancen sind neben den Knoten angegeben. Symmetrische Varianten der Operationen existieren.

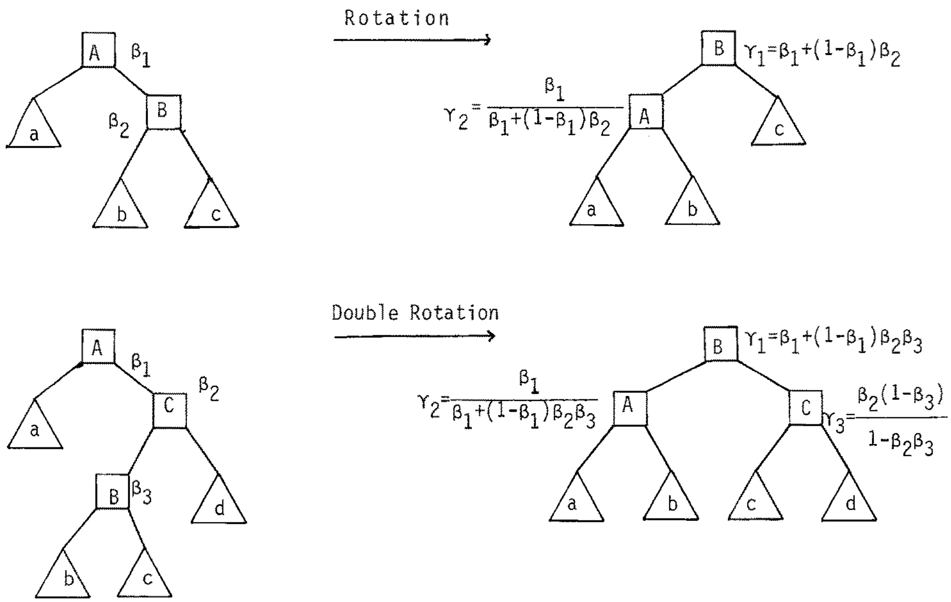
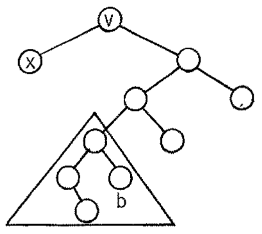


Bild 1:

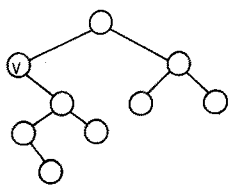
Nievergelt und Reingold geben in [NR] folgenden Satz ohne Beweis

Theorem 4: If $\alpha \leq 1-\sqrt{2}/2$ and the insertion or deletion of a node in a tree in BB[α] causes a subtree T of that tree to have root-balance less than α, T can be rebalanced by performing one of the two transformations shown above. More precisely, let β_2 denote the balance of the right subtree of T after the insertion or deletion has been done. If $\beta_2 < (1-2\alpha)/(1-\alpha)$, then a rotation will rebalance T, otherwise a double rotation will rebalance T.

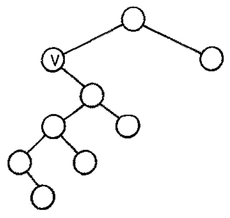
Dieser Satz ist falsch. Betrachte folgendes Gegenbeispiel:
$\alpha = 2/11$. Die Blätter sind nicht eingezeichnet.



Die Wurzel v dieses Baumes hat Balance $\rho(v) = 2/11$. Nach Streichen eines Blattes mit Vater x ist $\rho(v) = 1/10$. Die Wurzel muß daher rebalanciert werden. Eine Doppelrotation liefert:



Knoten v hat Balance $1/6 < 2/11$. Nach einer Rotation erhalten wir folgenden Baum



Die Balance von v ist hier noch schlechter.

Dieses Gegenbeispiel zeigt, daß der "Satz" in [NR] für $1/6 < \alpha \le 2/11$ falsch ist. Für jedes α mit $0 < \alpha \le 1/6$ erhält man ein analoges Gegenbeispiel, indem man den Teilbaum b vergrößert.

Wir werden zeigen, daß eine stärkere Version des obigen Satzes für $2/11 < \alpha \le 1-\sqrt{2}/2$ gilt. Wir werden noch mehr beweisen. Wir werden nicht nur zeigen, daß Rotation und Doppelrotation genügen, um den Baum zu rebalancieren, sondern auch dazu ausreichen, die Balancen in das Intervall $[(1+\delta)\alpha, 1-(1+\delta)\alpha]$ für kleines δ zu bewegen. Diese Beobachtung wird uns im nächsten Abschnitt erlauben zu zeigen, daß die mittlere Anzahl der Balancierungsoperationen konstant ist.

Satz 1: Es gibt eine stetige monoton wachsende Funktion

$c : [0,0.01] \to R$ mit $c(0) = 0$, $c(0,01) = 0{,}0043$ so daß gilt:

Sei $\alpha \in R$, $2/11 < \alpha \leq 1-\sqrt{2}/2 - c(\delta)$ und sei T ein binärer Baum mit linken und rechten Teilbäumen T_ℓ bzw. T_r so daß gilt:

1) T_ℓ und T_r sind in $BB[\alpha]$

2) $|T_\ell|/|T| < \alpha$ und entweder

2.1) $|T_\ell|/(|T|-1) \geq \alpha$

(T wurde durch Einfügen eines Blattes im rechten Teilbaum erhalten)

oder

2.2) $(|T_\ell|+1|)/(|T|+1) \geq \alpha$

(T wurde durch Streichen eines Blattes von linkem Teilbaum von T erhalten)

Dann genügen Rotation und Doppelrotation, um T derart zu balancieren, so daß für $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bezüglich Bild 1 gilt:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in [(1 + \delta)\alpha,\ 1-(1+\delta)\alpha] \quad \text{für } 1/4 < \alpha \leq 1-\sqrt{2}/2 - c(\delta)$$

$|T| > 10$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in [\alpha, 1-\alpha]$ sonst.

Bemerkung: Für $\delta = 0$ ist dies die korrekte Version des Satzes von Nievergelt und Reingold.

Beweis: Mühevolle, aber einfache Rechnungen (siehe hierzu [BM]).

III. DIE MITTLERE ANZAHL DER BALANCIERUNGSOPERATIONEN

Bevor wir unser Haupttheorem zeigen können, benötigen wir einige Begriffe:

Eine Transaktion ist entweder eine Einfüge- oder eine Streiche-Operation. Eine Transaktion geht durch einen Knoten v, falls v auf dem Suchpfad zu dem Blatt liegt, das eingefügt bzw. gestrichen wurde.

Ein Knoten v nimmt an einer Balancierungsoperation teil, falls er einem der in Bild 1 bezeichneten Knoten entspricht. Ein Knoten v verursacht eine Balancierungsoperation, falls er der Wurzel eines in Bild 1 auf der linken Seite gezeichneten Baumes entspricht.

Betrachte eine Folge von Transaktionen. Wir starten mit einem Baum T_0 und wenden die erste Transaktion auf ihn an. Dann wird der Baum rebalanciert und wir erhalten als Resultatsbaum T_1. Die nächste Transaktion wird auf T_1 angewandt, T_1 wird rebalanciert ... .

Sei $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_m, \ldots$ eine solche Folge von $BB[\alpha]$-Bäumen.

Lemma 1: Sei $0 \leq \delta \leq 0{,}01$, $2/11 < \alpha \leq 1-\sqrt{2}/2 - c(\delta)$ und v ein Knoten. Falls

1) v verursacht eine Balancierungsoperation in T_m (nachdem eine Transaktion auf T_m angewandt wurde) und
2) entweder v nahm schon vorher an einer Balancierungsoperation teil oder v war nicht schon ein Knoten im Anfangsbaum T_0 und
3) n ist die Anzahl der Blätter des Teilbaumes mit Wurzel v in T_m und $n > 11$ falls $\alpha \leq 1/4$

Dann gingen mindestens $\lceil \delta\alpha n \rceil$ Transaktionen durch v seit v zum letzten Mal an einer Balancierungsoperation teilgenommen hat oder, falls v noch an keiner Balancierungsoperation teilgenommen hat, seitdem v kreiert wurde.

Beweis: Sei $j < m$ so daß gilt:

v nahm an einer Balancierungsoperation in T_j teil, aber nicht in $T_{j+1}, \ldots, T_{m-1}$ oder v existierte nicht in T_j aber in $T_{j+1}, \ldots, T_{m-1}$ und nahm niemals an einer Balancierungsoperation teil. Im zweiten Fall ist die Wurzelbalance $\rho(v)$ des Knotens v in T_{j+1} gleich 1/2. Im ersten Fall liegt die Wurzelbalance $\rho(v) = t'/n'$ des Knotens v in T_{j+1} in

$[(1+\delta)\alpha,\ 1-(1+\delta)\alpha]$ oder $\alpha \leq 1/4$ und $n' \leq 10$. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.

Die Balance $\mathcal{g}(v) = t/n$ des Knotens v in T_m liegt außerhalb des Intervalls $[\alpha,1-\alpha]$. Sei oBdA $t/n < \alpha$.

In den Bäumen $T_{j+1},\ldots,T_{m-1}$ waren $d_\ell(i_\ell)$ Streiche-(Einfüge-)Operationen im linken Teilbaum von v und d_r (i_r) Streiche-(Einfüge-) Operationen im rechten Teilbaum von v durchgeführt worden.

Also gilt:

$$t = t' - d_\ell + i_\ell$$
$$n = n' - d_\ell - d_r + i_\ell + i_r$$

Die Anzahl der Transaktionen, die durch v gehen, beträgt $d\ +d_r+i_\ell\ +i_r$. Wir benötigen eine untere Schranke für diese Zahl. Sicher ist $|n-n'|$ eine untere Schranke. Deswegen sind wir im Fall $n' \leq 10 \wedge \alpha \leq 1/4$ fertig. Sei also $n' > 10 \vee \alpha > 1/4$ und daher auch $t'/n' \in [(1+\delta)\alpha,\ 1-(1+\delta/\alpha]$.

Anm.: Die Behauptung stimmt nicht und daher $d_\ell+d_r+i_\ell+i_r<\delta\alpha n$ dann gilt:

$$t'/n' - (1+\delta)\alpha =$$

$$\frac{t+d_\ell-i_\ell}{n+d_\ell+d_r-i_\ell-i_r} - (1+\delta)\alpha$$

$$\leq \frac{t+d_\ell}{n+d_\ell-i_r} - (1+\delta)\alpha$$

$$\leq \frac{t+\delta\alpha n}{n+\delta\alpha n} - (1+\delta)\alpha \qquad \text{da } 0 \leq d_\ell + i_r \leq \delta\alpha n$$

$\frac{t+d_\ell}{n+d_\ell-i_r}$ monoton wachsend in d_ℓ und $\frac{t+\delta\alpha n-i_r}{n+\delta\alpha n-2i_r}$ für

$2/11 < \alpha \leq 0{,}3$, $0 \leq \delta \leq 0{,}01$ monoton fallend in i_r

$$\leq \frac{\alpha n+\delta\alpha n}{n+\delta\alpha n} - (1+\delta)\alpha$$

$$= -\frac{(1+\delta)\delta\alpha^2}{1+\delta\alpha} < 0$$

Widerspruch

□

Lemma 1 zeigt, daß zwischen zwei Zeitpunkte, in welchen v an einer Balancierungsoperation teilnimmt, viele Transaktionen durch v gehen. Um den Beweis zu beenden, benötigen wir nur nooch eine gescheite Art, die Transaktionen und die Balancierungsoperationen zu zählen.

Jeder Knoten v erhält Zähler

Transaktionszähler $TA_i(v)$

Balancierungsoperationszähler $BO_i(v)$ $\quad i \in N_0$

Weiterhin gibt es noch einen speziellen Zähler S. Alle Zähler haben anfangs den Wert 0.

Sei T_0 ein Baum in BB[α] und sei $T_0, T_1, \ldots, T_m, \ldots$ eine Transaktionsfolge von BB[α]-Bäumen.

Sei v ein Knoten in T_m und n die Anzahl der Blätter des Teilbaumes in T_m mit Wurzel v. Sei i so gewählt,daß gilt:

$(1/1-\alpha)^i \leq n < (1/1-\alpha)^{i+1}$. Da $n \geq 2$ ist, gilt $i \geq 1$.

Falls die auf T_m angewandte Transaktion durch Knoten v geht, zählen wir eine Einheit zu den Transaktionszählern $TA_{i-1}(v)$, $TA_i(v)$ und $TA_{i+1}(v)$.

Falls v eine Balancierungsoperation in T_m verursacht, zählen wir eine Einheit zu

$BO_i(v)$. falls v schon vorher an einer Balancierungsoperation teilnahm oder nicht schon im Anfangsbaum T_0 war

S sonst.

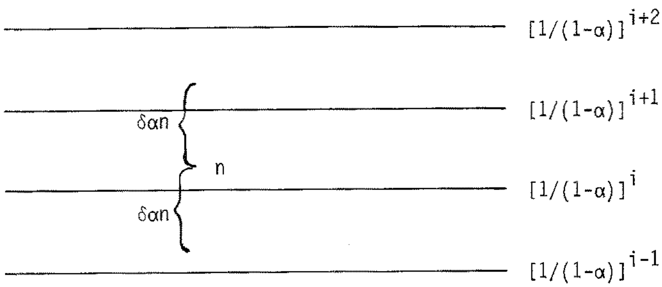
Da für jeden Knoten v im Anfangsbaum T_0 höchstens eine Einheit zu S gezählt wird, gilt

$$S \leq |T_0| - 1.$$

Wir müssen noch die Inhalte der Balancierungsoperationszähler $BO_i(v)$ zusammenzählen.

Wann immer eine Einheit zum Zähler $BO_i(v)$ addiert wird, sind wir in einer Situation, in welcher Lemma 2 anwendbar ist: Ist $n \geq 11$ oder

$\alpha > 1/4$, dann gingen mindestens $\delta\alpha n$ Transaktionen durch v, seitdem v zum letzten Mal an einer Balancierungsoperation teilgenommen hat (falls v dies jemals tat) oder v kreiert wurde. Da (betrachte Bild 2) $n - [1/(1-\alpha)]^{i-1} \geq \delta\alpha n$ und $[1/(1-\alpha)]^{i+2} - n \geq \delta\alpha n$



<u>Bild 2:</u>

wissen wir , daß mindestens $\delta\alpha n$ Einheiten zu $TA_i(v)$ addiert wurden, seitdem v zum letzten Mal an einer Balancierungsoperation teilgenommen hat oder kreiert wurde. Also gilt:

$$BO_i(v) \leq \frac{1}{\delta\alpha n} TA_i(v) \leq \frac{(1-\alpha)^i}{\delta\alpha} TA_i(v) \qquad \text{falls } \alpha > 1/4 \text{ oder } [1/(1-\alpha)]^i \geq 11$$

Da $\alpha > 2/11$, ist dies sicher der Fall für $i \geq 12$.

Wir können nun die Anzahl A der für die ersten m Transaktionen benötigten Balancierungsoperationen abschätzen.

Es gilt:

$$A = S + \sum_v \sum_i BO_i(v)$$

$$= S + \sum_v \sum_{i<k} BO_i(v) + \sum_v \sum_{i \geq k} BO_i(v)$$

Da $S \leq |T_0| - 1$,

$$\sum_v \sum_{i \geq k} BO_i(v)$$

$$\leq 1/\delta\alpha \sum_v \sum_{i \geq k} (1-\alpha)^i \; TA_i(v)$$

$$\leq [3(1-\alpha)^k/\delta\alpha^2] \cdot m$$

und

$$\sum_{v} \sum_{i<k} BO_i(v)$$

$\leq$ max. Tiefe eines BB[α]-Baumes mit $[1/(1-\alpha)]^k$ Blättern]$\cdot m$

$\leq (k-1)\cdot m$

wie einfache Rechnungen ergeben (siehe [BM]) gilt:

$$\leq |T_0|-1 + \min_{\substack{k\in N\\ k\geq 12}} [\ k-1+3(1-\alpha)^k/\delta\alpha^2]\cdot m$$

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

<u>Satz 2:</u> Sei $0 < \delta \leq 0{,}01$ und $2/11 < \alpha \leq 1-\sqrt{2}/2 - c(\delta)$, wobei c wie in Satz 1 definiert ist. Dann gibt es eine Konstante d, so daß gilt:

Sei T_0 ein Baum in BB[α]. Höchstens $|T_0|-1+d\cdot m$ Balancierungsoperationen sind bei der Durchführung einer beliebigen Folge von m Einfüge- und Streiche-Operationen mit Anfangsbaum T_0 erforderlich.

<u>Korollar:</u> Es gibt eine Konstante d mit folgender Eigenschaft: Es genügen $d\cdot m$ Balancierungsoperationen zur Ausführung von m Einfüge- und Streiche-Operationen in einem anfänglich leeren Baum.

Wir wollen nun für ein konkretes Beispiel die Konstante d bestimmen.

Sei $\alpha = 1/4$ und $\delta = 0{,}01$.

Sei K = 25. Dann gilt $\frac{3(1-\alpha)^k}{\alpha 2} \approx 3{,}61$.

Ein BB[1/4]Baum mit $\leq (4/3)^{25} \approx 1329$ Blättern hat maximale Tiefe 23,87 (vergleiche [M,NR]).

Also gilt $d \leq 27{,}48$.

BIBLIOGRAPHY

[AHU] Aho, Hopcroft, Ullman: The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison Wesley, 1974

[AVL] Adel'son-Velskii, Laudis: An algorithm for the organization of information, Soviet. Math. Dokl, 3, 1259-1262, 1962

[BM] Blum N., Mehlhorn, K.: On the average number of rebalancing operations in weight-balanced trees, Technischer Bericht A-78/06, FB 10 der Universität des Saarlandes, 1978

[BS] Bayer, Schkolnik: Concurrency of Operations on B-Trees, Acta Informatica, Vol. 9, Fasc. 1, 1977, S. 1-22

[F] Foster: Information Storage and Retrieval using AVL-trees, Proc. ACM Nat. Conf. 20, 192-2o5, 1965

[KFSK] Karlton, Fuller, Scroggs, Kaehler: Performance of Height Balanced Trees, ACM, Jan. 1976, Vol. 19/1, S. 23-28

[M] Mehlhorn, K.: Effiziente Algorithmen, Teubner Verlag, Studienbücher Informatik, 1977

[NR] Nievergelt, Reingold: Binary Search Trees of Bounded Balance, SIAM, J. Comput., Vol. 2, No. 1, March 1973

[OS] Ottman, Six: Eine neue Klasse von ausgeglichenen Bäumen, Angewandte Informatik, Heft 9, S. 395-4oo, 1976

[Y] Yao: On Random 2-3 Trees, Acta Informatica, Vol. 9, Fasc. 2, 1978, S. 159-17o

[KN] Knuth: The Art of Computer Programming, Vol. III: Sorting and Searching, Addison Wesley Publishing Company